$C^*_{red}(S)/K(l^2(S)) \cong C^*_{red}(\mathbb{R}_+)$ *и, как следствие, короткая последовательность*

$$0 \to K(l^2(S)) \to C^*_{red}(S) \to C^*_{red}(\mathbb{R}_+) \to 0$$

точна.

Следствие. *Алгебра $C^*_{red}(S)$, где $S = \{a \in \mathbb{R} : a \geq 1\} \cup \{0\}$, имеет только два инвариантных идеала — коммутаторный и идеал компактных операторов.*

Литература

1. Григорян С. А., Салахутдинов А. Ф. *C^*–алгебры, порожденные полугруппами с сокращением* // Сиб. матем. журн. – 2010. – Т. 50. – № 1. – С. 16—25.

2. Аухадиев М. А., Григорян С. А., Липачева Е. В. *Операторный подход к квантованию полугрупп* // Матем. сб. – 2014. – Т. 205. – № 3. – С. 15—40.

ON A CLASS OF GRADED IDEALS OF SEMIGROUP C^*–ALGEBRAS

E.V. Lipacheva, T.A. Grigoryan

The article continues the previously initiated research of the C^*–algebra generated by the left regular representation of an Abelian semigroup. We study invariant ideals of this C^*–algebra invariant with respect to the representation of a compact group G in the automorphism group of this algebra. It is proved that the invariance of the ideal is equivalent to the fact that this ideal is a graded C^*–algebra. It is studied a class of graded primitive ideals generated by a single projector.

Keywords: C^*–algebra, graded C^*–algebra, semigroup, left regular representation, invariant subspaces, representation in the automorphism group, invariant ideal, commutator ideal.

УДК 517.956

РАЗМЕРНОСТЬ ПРОСТРАНСТВ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА И ВАРИАЦИИ ПОТЕНЦИАЛА

А.Г. Лосев[1]

1 *allosev59@gmail.com*; Волгоградский государственный университет

Работа посвящена изучению решений стационарного уравнения Шредингера $\Delta u - q(x)u = 0$ на некомпактных римановых многообразиях. А именно, рассматривается вопрос изменения размерности пространства ограниченных решений данного уравнения при различных вариациях потенциала $q(x)$. В частности, показано, что уменьшение потенциала $q(x)$ не уменьшает размерности пространства ограниченных решений данного уравнения.

Ключевые слова: стационарное уравнение Шредингера, теоремы типа Лиувилля, некомпактные римановы многообразия, массивные множества.

Данная работа посвящена изучению ограниченных решений стационарного уравнения Шредингера

$$Lu = \Delta u - q(x)u = 0 \tag{1}$$

на произвольном некомпактном римановом многообразии M. Здесь $q(x)$ – непрерывная неотрицательная на M функция. Далее решения уравнения (1) будем называть q-гармоническими функциями.

В теории эллиптических уравнений на некомпактных римановых многообразиях наиболее популярными являются следующие постановки задач:
1) найти условия выполнения терем типа Лиувилля о тривиальности классов решений рассматриваемого уравнения;
2) найти условия однозначной разрешимости краевых задач.

Остановимся на первой задаче. Традиционно осуществляется следующий подход к теоремам типа Лиувилля. Пусть на римановом многообразии M задан класс функций A и эллиптический оператор L. Будем говорить, что на M выполнено (A,L)-лиувиллево свойство, если любое решение уравнения $Lu=0$, принадлежащее функциональному классу A, является тождественной постоянной.

Заметим, что в случае, когда $q(x)$ нетривиальна, ненулевая постоянная не является решением уравнения (1), и лиувиллево свойство формулируется для него несколько иначе. А именно, говорят что на M выполнено лиувиллево свойство для ограниченных решений уравнения (1), если любое такое решение есть тождественный нуль.

В последнее время наметилась тенденция к более общему подходу к теоремам типа Лиувилля. В ряде исследований оцениваются размерности различных пространств решений линейных уравнений эллиптического типа. В частности, в [1] была доказана точная оценка размерностей пространств ограниченных гармонических функций на некомпактных римановых многообразиях в терминах массивных множеств. Аналогичный результат для решений стационарного уравнения Шредингера (1) недавно был доказан в [2]. Остановимся подробнее на понятии массивных множеств.

Пусть M – гладкое связное некомпактное риманово многообразие. Непрерывную функцию u, определенную на открытом множестве $\Omega\subset M$, будем называть q-субгармонической, если для любой области $G\Subset\Omega$ и q-гармонической функции

$$v\in C(\overline{G}),\quad u|_{\partial G}=v|_{\partial G},$$

выполнено $u\le v$ в G.

Следуя [3], открытое собственное подмножество $\Omega\subset M$ будем называть q-массивным, если на M существует нетривиальная q-субгармоническая функция такая, что $u=0$ на $M\setminus\Omega$ и $0\le u\le 1$ (в случае $q\equiv 0$ множество Ω называется массивным). Такую функцию u будем называть *внутренним потенциалом множества* Ω.

Свойства q-массивных множеств вполне аналогичны свойствам массивных множеств, подробно изложены в [1] и [3]. Сформулируем некоторые из них.

Лемма. *Пусть $\Omega_1\subset\Omega_2$ – открытые собственные подмножества M. Тогда*
1) если Ω_1 – q-массивно, то и Ω_2 – q-массивно;
2) если Ω_2 – q-массивно и $\overline{\Omega}_2\setminus\Omega_1$ – компакт, то и Ω_1 – q-массивно.

Основным результатом [2] является следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $q(x)$ – нетривиальная, неотрицательная на M функция, а $m\ge 1$ – натуральное число. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) размерность пространства ограниченных q-гармонических функций на M не менее m;
2) в M найдется m попарно не пересекающихся q-массивных подмножеств.

Заметим, что в случае $q(x) \equiv 0$, данное утверждение верно только для $m \geq 2$.

Ряд исследований, выполненных в рамках данной тематики, был посвящен вопросам сохранения лиувиллева свойства при различных вариациях геометрии многообразия или коэффициентов рассматриваемых уравнений. В частности, рассматривался вопрос сохранения лиувиллева свойства и сохранения условия однозначной разрешимости краевых задач при изменении потенциала $q(x)$ (см. [4], [5]). В данной работе доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть на M выполнено неравенство $0 \leq q_1(x) \leq Aq(x)$, где $A = \mathrm{const} > 0$ и $q_1(x)$ не является тождественным нулем. Кроме того, пусть размерность пространства ограниченных q-гармонических функций на M равна m, где m – целое неотрицательное число. Тогда размерность пространства ограниченных q_1-гармонических функций на M не меньше m.*

Отметим, что случай $m = 0$ рассмотрен в [4]. Также заметим, что условие отличия потенциала от тождественного нуля является существенным, что показывает пример, приведенный в [6].

В основе доказательства теоремы 2 лежит следующее свойство подмножеств римановых многообразий. Если Ω не является q_1-массивным подмножеством многообразия, то оно не является q-массивным подмножеством данного многообразия. Также используется теорема 1.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Администрации Волгоградской области (проект 15-41-02479 р_поволжье_а).

Литература

1. Григорьян А. А. *О размерности пространств гармонических функций* // Мат. заметки. – 1990. – Т. 48. – № 5. – С. 55–60.

2. Григорьян А. А., Лосев А. Г. *О размерности пространств решений стационарного уравнения Шредингера на некомпактных римановых многообразиях* // Матем. физика и комп. моделирование. – 2017. – Т. 20. – № 3. – С. 34–42.

3. Grigor'yan A. *Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds* // Bulletin of Amer. Math. Soc. – 1999. – № 36. – P.135–249.

4. Григорьян А. А., Надирашвили Н. С. *Лиувиллевы теоремы и внешние краевые задачи* // Изв. вузов. Матем. – 1987. – № 5. – С. 25–33.

5. Мазепа Е. А. *Краевые задачи для стационарного уравнения Шредингера на римановых многообразиях* // Сиб. матем. журн. – 2002. – Т. 43. –№ 3. – С. 591–599.

6. Лосев А. Г. *О некоторых лиувиллевых теоремах на некомпактных римановых многообразиях* // Сиб. матем. журн. – 1998. – Т. 39. – № 1. – С. 87–93.

DIMENSION OF SPACES OF SOLUTIONS OF THE SCHRODINGER EQUATION AND POTENTIAL VARIATIONS

A.G. Losev

The paper is devoted to the study of solutions of the stationary Schrodinger equation $\Delta u - q(x)u = 0$

on noncompact Riemannian manifolds. Namely, we study changing of the dimension of the space of bounded solutions of the given equation for various variations of potential $q(x)$. In particular, it is shown that a decrease in the potential does not decrease the dimension space of bounded solutions of the given equation.
Keywords: stationary Schrodinger equation, Liouville type theorems, noncompact Riemannian manifolds, massive sets.

УДК 517.5

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ДВОИЧНЫМИ БАЗИСНЫМИ СПЛАЙНАМИ

С.Ф. Лукомский[1], М.Д. Мушко[2]

1 *lukomskiisf@info.sgu.ru*; Саратовский национальный исследовательский государственный университет
2 *dart-maximus@yandex.ru*; Саратовский национальный исследовательский государственный университет

Рассматривается новый класс базисных сплайнов, которые получаются двукратным интегрированием функции Уолша. Приведены формулы построения интерполяционного сплайна по равномерной сетке, указана величина отклонения сплайна от интерполируемой функции. Доказано, что построенный базисный сплайн являетсяя решением масштабируюшего уравнения.

Ключевые слова: двоичные базисные сплайны, интерполяция, масштабирующее уравненеие.

Пусть $If(x)=\int\limits_0^x f(t)\,dt$ $(x\in[0,1])$ – оператор интегрирования, $r_n(t)=\operatorname{sign}\sin 2^n t$ – функции Радемахера, $W_{2^n-1}(x)=\prod\limits_{k=0}^{n-1} r_k(x)$ – функции Уолша.

Определение 1. *Функцию $\tilde\varphi(x)=(4I)^2W_3(x)$ $(x\in[0,1])$ будем называть двоичным базисным сплайном 2-й степени.*

Очевидно, что $\tilde\varphi(x)$ есть кусочно-монотонная функция, совпадающая с многочленом 2-й степени на каждом отрезке $\left[\frac{k}{4},\frac{k+1}{4}\right]$ $(k=0,1,2,3)$.

Определение 2. *Обозначим через $Q_2^{(N)}$ совокупность кусочно-многочленных функций 2-й степени, имеющих непрерывные производные на отрезке $\left[0,\frac{N}{4}\right]$, $N\ge 4$, и которые на каждом отрезке $\left[\frac{k}{4},\frac{k+1}{4}\right]$ совпадают с некоторым многочленом второй степени.*

Теорема 1. *При всех $x\in\mathbb{R}$ справедливы равенства*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\tilde\varphi\left(x+\frac{n}{4}\right)=2;\ \sum_{n\in\mathbb{Z}}\tilde\varphi\left(x+\frac{n}{2}\right)=1.$$

Теорема 2. *Совокупность функций $\tilde\varphi\left(x-\frac{n}{4}\right)$ $(-3\le n\le\frac{N-1}{3}, n\ne 1)$ образуют базис в пространстве $Q_2^{(N)}$*